

1. Wprowadzenie

Równania różniczkowe cząstkowe – równania, w których występuje niewiadoma funkcja wielu zmiennych i jej pochodne względem **różnych** zmiennych – stanowią dziedzinę, która (szczególnie w oczach studenta, wyposażonego w bagaż dwóch pierwszych lat studiów matematycznych i przyzwyczajonego do eleganckich teorii, budowanych w trybie: **abstrakcyjna i ogólna definicja, przykład, lemat, twierdzenie, dowód, wniosek**) dość poważnie różni się od innych gałęzi matematyki. Składa się na to kilka przyczyn.

Po pierwsze, jest to dziedzina niezwykle obszerna, łącząca się z wieloma partiami analizy matematycznej, a także z geometrią różniczkową oraz (w mniejszym zakresie) rachunkiem prawdopodobieństwa. Osoba, która na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW prowadzi wykład *Równania różniczkowe cząstkowe I*, powinna przedstawić studentom dość obszerny materiał, którego początki sięgają lat 1740–1750 i prac Daniela Bernoulliego oraz Jeana d’Alemberta poświęconych równaniu struny, a którego najbardziej zaawansowana partia pochodzi z okolic połowy dwudziestego wieku – i praktycznie nie sposób jej omówić, nie sięgając po twierdzenie Stokesa oraz okruchy analizy funkcjonalnej. Przykłady ilustrujące sposoby rozwiązywania pojedynczych równań lub własności rozwiązań są często niełatwe – nie ze względu na jakąś szczególną komplikację pojęć, lecz dlatego, że aby ocenić i docenić końcowy wynik, trzeba się najpierw przebić przez warstwę rachunków, na ogół dłuższą niż, powiedzmy, w algebrze liniowej. Mało kto lubi rachunki – szczególnie przed ich wykonaniem. Dodajmy, że niektóre z przykładów podawanych zwyczajowo na ćwiczeniach z tego przedmiotu miały w swoim czasie przełomowe znaczenie. Na przykład teoria szeregów Fouriera wyrosła z prób rozwiązywania równania falowego i równania przewodnictwa cieplnego w **jednym** wymiarze przestrzennym, a korzenie teorii przestrzeni Hilberta (oraz operatorów zwartych) wiążą się z badaniem równań Laplace’a i Poissona (i wartości własnych laplasjanu).

Po drugie, nie istnieje coś takiego, jak **ogólna teoria równań różniczkowych cząstkowych**. Nie ma właściwie żadnych twierdzeń, które dotyczyłyby **wszystkich** równań różniczkowych cząstkowych (za wyjątek, wymagający i tak przyjęcia bardzo ostrych założeń i poważnego ograniczenia klasy rozpatrywanych równań, można uznać twierdzenie Cauchy’ego i Kowalewskiej, które omawiamy krótko w ostatnim rozdziale). Owszem, są przykłady – często bardzo rozbudowane, są twierdzenia, dotyczące zwykle jednego równania lub układu równań, a w wersji optymistycznej – tej czy innej klasy równań, na ogół dość wąskiej, biorąc pod uwagę, jak szeroka jest klasa wszystkich napisów, które bylibyśmy skłonni nazwać **równaniami różniczkowymi cząstkowymi**. Ale na tym, w jakimś sensie, koniec.

Po trzecie wreszcie, w równaniach różniczkowych cząstkowych często warto odwołać się do motywacji fizycznej (oraz do fizycznej interpretacji niektórych twierdzeń, wzorów itp.). To właśnie fizyk mówi niekiedy matematykowi, które równania z nieskończonej listy są **ważne** i warto je rozważyć najpierw – bowiem ich rozwiązania opisują jakiś proces fizyczny. (Niemal wszystkie osoby, które na dalszych stronach zostaną wymienione z nazwiska, zajmowały się i matematyką, i fizyką) Nie oznacza to oczywiście, że nie sposób uczyć się teorii równań cząstkowych, o ile się nie zna fizyki. Z drugiej strony, elementarna znajomość fizyki pozwala wyrobić sobie pełniejszy obraz niektórych partii teorii.

W świetle tych uwag nie ma sensu rozpoczynać wykładu od ogólnej definicji **równania różniczkowego cząstkowego** (z której i tak nie będziemy później korzystać). Zamiast tego podamy kilka przykładów. Bliższe omówienie trzech z nich zajmie nam mniej więcej pół semestru.

1.1. Garść przykładów

A Układ równań Cauchy’ego–Riemanna

Wiadomo (patrz dowolny podręcznik do teorii funkcji analitycznych), że funkcja $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ma w każdym punkcie pochodną zespoloną **wtedy i tylko wtedy, gdy** jej część rzeczywista u i zespolona v spełniają układ równań

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (1.1)$$

Zatem, w pewnym sensie, cała teoria funkcji analitycznych zajmuje się badaniem własności rozwiązań **jednego** układu dwóch linio-

wych równań różniczkowych cząstkowych (pierwszego rzędu, o stałych współczynnikach).

[B] Równanie powierzchni minimalnych

Niech $D = D(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie dyskiem jednostkowym; rozpatrujemy wszystkie funkcje $u : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^2 , których wartości brzegowe $u|_{\partial D}$ są równe ustalonej funkcji ciągłej $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$. Dla takich u położmy

$$P[u] = \int_D \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dx \, dy,$$

gdzie

$$|\nabla u|^2 = (u_x)^2 + (u_y)^2$$

jest kwadratem długości gradientu funkcji u . Wartością funkcjonału P jest pole powierzchni stanowiącej wykres funkcji u ; brzegiem tej powierzchni jest ustalona krzywa Jordana w $\mathbb{R}^3$, składająca się z punktów $(\cos t, \sin t, \varphi(\cos t, \sin t))$. Można zadać naturalne pytanie: czy P osiąga swą wartość najmniejszą, a jeśli tak, to dla jakiej funkcji? Nietrudno podać warunek konieczny na to, by $P[u] = \min$; jeśli tak jest, to z pewnością dla każdej liczby $\varepsilon \in \mathbb{R}$ i każdej funkcji $\psi \in C_0^\infty(D)$ mamy

$$F(\varepsilon) := P[u + \varepsilon\psi] \geq P[u] = F(0).$$

F jest funkcją jednej zmiennej ε i w zerze ma minimum lokalne, więc (proszę sprawdzić, że F jest funkcją różniczkowalną!) $F'(0) = 0$. Różniczkując pod znakiem całki, otrzymujemy zatem warunek

$$\int_D \frac{u_x \psi_x + u_y \psi_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, dx \, dy = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(D),$$

lub równoważnie, na mocy twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego,

$$\int_D \psi \left[\left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_x + \left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_y \right] \, dx \, dy = 0$$

$$\forall \psi \in C_0^\infty(D).$$

Z dowolności ψ wynika, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe zeru, tzn.

$$\left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_x + \left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_y = 0 \quad \text{w dysku } D. \quad (1.2)$$

Listę oznaczeń
można znaleźć
w dodatku A

Twierdzenie
Gaussa–Ostrogradskiego
formułujemy na
początku rozdziału 4
(patrz tw. 4.3)

Jest to wspomniany warunek konieczny. Jego geometryczna interpretacja jest następująca: wykres funkcji u ma w każdym punkcie średnią krzywiznę równą 0.

C Równanie przewodnictwa cieplnego

Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$; dodatkową zmienną $t \geq 0$ będziemy interpretować jako czas. Równanie

$$u_t - \Delta_x u = 0, \quad (1.3)$$

gdzie

$$\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1.4)$$

jest tzw. **operatorem Laplace’a** (krótko: laplasjanem), nazywa się równaniem przewodnictwa cieplnego. Niewiadoma funkcja $u : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest, z fizycznego punktu widzenia, temperaturą substancji (jednorodnej i izotropowej) wypełniającej obszar Ω ; ściślej, $u(x, t)$ jest temperaturą w punkcie $x \in \Omega$ w chwili czasu t .

Aby zagwarantować istnienie i jednoznaczność rozwiązań, równanie (1.3) uzupełnia się warunkami początkowymi i brzegowymi. Na przykład zakłada się np., że dany jest początkowy rozkład temperatury $u(x, 0) = f(x)$ i wiadomo ponadto, w jaki sposób dokonuje się wymiana ciepła między Ω i otoczeniem, np.

- $u|_{\partial\Omega} = 0$ (warunek brzegowy Dirichleta: stała temperatura zewnątrz obszaru Ω);
- pochodna normalna $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ (warunek brzegowy Neumanna: brak przepływu ciepła przez brzeg obszaru Ω).

Podamy, dla $n = 3$, szkieletowe wyprowadzenie równania (1.3). Potrzebne w nim będą dwa założenia o charakterze fizycznym. Po pierwsze, przyjmiemy, że tzw. **strumień ciepła** $\mathbf{J}(x, t)$, tzn. wektor wskazujący kierunek i tempo przepływu ciepła, jest proporcjonalny do gradientu temperatury,

$$\mathbf{J}(x, t) = -k \nabla_x u = -k(u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}).$$

(Stała k jest dodatnia, minus ma sens fizyczny.) Zatem, ilość ciepła przepływającego przez powierzchnię Σ w jednostce czasu jest równa

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{J}, \mathbf{n} \rangle d\sigma;$$

$\mathbf{n}$ oznacza jednostkowy wektor normalny do powierzchni Σ . Ilość ciepła, wypływającego w jednostce czasu z obszaru $V \subseteq \Omega$, to

$$\int_{\partial V} \langle \mathbf{J}, \mathbf{n} \rangle d\sigma = \int_V \operatorname{div} \mathbf{J} dx.$$

(Równość całek wynika z twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego; zakładamy milcząco, że temperatura u jest funkcją klasy C^2). Drugie założenie o charakterze fizycznym orzeka, że każdy obszar $V \subseteq \Omega$ ogrzewa się proporcjonalnie do ilości ciepła, która doń wpływa. Przeto, z uwagi na ostatnie równanie,

$$-\int_V c \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_{\partial V} \langle \mathbf{J}, \mathbf{n} \rangle d\sigma = \int_V \operatorname{div} \mathbf{J} dx,$$

to znaczy

$$\int_V \left(\operatorname{div} \mathbf{J} + c \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx = 0.$$

Ponieważ V jest dowolny, więc wynika stąd, że

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div}(k \nabla u) = k \Delta_x u,$$

to znaczy przy odpowiednim doborze jednostek¹ istotnie jest $u_t = \Delta_x u$.

[D] Równanie Laplace’a

Jest to równanie $\Delta u = 0$. Jego rozwiązania nazywa się funkcjami harmonicznymi (patrz rozdz. 4).

Jak poprzednio, Δ jest operatorem Laplace’a, funkcja u zaś jest określona na pewnym obszarze $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Równanie Laplace’a opisuje stany stacjonarne rozmaitych procesów fizycznych: w zależności od interpretacji, funkcja u może być np. stacjonarnym (granicznym) rozkładem temperatury w obszarze Ω , potencjałem pola grawitacyjnego bądź pola elektromagnetycznego (w obszarze pozbawionym źródeł pola). Dla $n = 2$, część urojona i rzeczywista funkcji analitycznej (patrz przykład **[A]**) są funkcjami harmonicznymi.

¹Widać, że gdy pomijamy współczynniki c i k , to lewa strona u_t ma jednostkę *stopień na sekundę*, natomiast prawa strona, $\Delta_x u$, ma jednostkę *stopień przez metr do kwadratu*. Fizyk likwiduje tę niezgodność, nadając odpowiednie jednostki współczynnikom. My nie będziemy się tą sprawą więcej przejmować.

E Równanie falowe

Jest to równanie

$$u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, t > 0. \quad (1.5)$$

Dla $n = 1$ równanie (1.5) opisuje (niewielkie) drgania **struny**, dla $n = 2$ – drgania **membrany** (błony bębena), w najciekawszym zaś z fizycznego punktu widzenia przypadku $n = 3$ – **fale elektromagnetyczne** (a także akustyczne). Wartości $u(x, t)$ niewiadomej funkcji u są wychyleniami z położenia równowagi.

Od badania własności rozwiązań równania falowego w najprostszym przypadku, dla $n = 1$, zaczniemy prawdziwą pracę.