

## Rozdział 1

# MATEMATYKA JAKO JĘZYK I SZTUKA

Matematyka (obok astronomii), będąc najstarszą nauką, jest jednocześnie wiecznie młoda, zmienia swą postać ustawicznie i jak rzekł pewien wielki matematyk, co dziesięć lat rodzi się na nowo, tzn. nic nie zostaje z jej dawnej materii – mimo to podobnie jak człowiek jest ciągle „tą samą” matematyką. Matematyka budziła zawsze przeciwstawne uczucia: od podziwu i nadziei do niechęci, a nawet wrogości; ale prawie zawsze spotykała się ze znikomym jedynie zrozumieniem.

Gdy rozmówca dowiadyuje się, że jestem matematykiem, to słyszę najczęściej taką odpowiedź: „Nigdy nie mogłem zrozumieć matematyki, jestem zupełna noga” albo „Ach, jak panu zazdrozczę, coś najwspanialszego, co być może, przecież wszystko opiera się na matematyce”. Nie trzeba dodawać, że obie osoby niewiele (nic właściwie) nie wiedzą o matematyce. Czasem spotyka się równie niewiele mówiący slogan o powiązaniu matematyki z muzyką: „Matematycy to ludzie muzykalni...”.

Skąd te tak różne reakcje i skąd tak mało zrozumienia?

### 1.1. Samotność matematyka

Czasem, pewnie na skutek dobrego wychowania, uprzejmości, rozmówca, któremu dobrze szła matematyka w szkole, pyta: „Czym pan się zajmuje, jakim działem matematyki?”. I teraz następuje konsternacja: czy mam odpowiedzieć, że zastosowaniem reprezentacji grup Liego do funkcji automorficznych? Wówczas rozmowa się kończy – przechodzimy do innego tematu, bo odpowiedź moja budzi albo przerażenie, albo wesołość. Pewna moja znajoma (wybitny

lekarz), gdy jest jej smutno, prosi: „Powiedz, czym się zajmujesz”. I odpowiadam: „Zastosowaniem reprezentacji grup Liego do funkcji automorficznych” – następuje serdeczny śmiech i humor jest poprawiony. Matematyka ma więc różnorakie zastosowania.

Jakże inaczej jest w naukach humanistycznych: na niniejszej konferencji mogłem – jak mi się wydawało – ze zrozumieniem słuchać wszystkich odczytów. Nie odważyłbym się natomiast brać udziału w konferencji z teorii liczb czy geometrii algebraicznej.

Ten brak możliwości porozumienia się z niematematykami, a nawet z kolegami z „odległej” specjalności matematycznej przypomina mi przeżycie osamotnienia w obcym kraju, którego języka nie znam. Narzuca to przypuszczenie, że matematyka jest „językiem”, a jej działy „dialektami”.

## 1.2. Matematyka jako język i pismo

By jednak głębiej wniknąć w naturę matematyki, konieczne jest szersze zrozumienie roli języka, niż to się zwykle przyjmuje. Nie będę tu mówić o funkcji komunikacyjnej języka, bo to nie budzi wątpliwości, lecz skoncentruję się na innej, nie mniej ważnej, a jak pokazuje współczesna filozofia, nawet fundamentalnej roli języka w poznawaniu i kształtowaniu rzeczywistości. Przytoczę tu wypowiedzi pedagogów, socjologów, filozofów i będę apelował do doświadczenia czytelnika, bo wiem z licznych rozmów, na jakie trudności wystawia i jakiego wysiłku wymaga teza:

### **Bez języka nie ma rzeczywistości.**

Sławny pedagog Friedrich Fröbel (1782–1852)<sup>1</sup> pisze: „Każda rzecz stawała się jakby dla dziecka dopiero dzięki słowu, przed słowem nie istniała dla dziecka, choć oko (zewnątrzne) wydawało się ją spozstrzegać. **Dopiero słowo tworzyło dla dziecka tę rzecz**”.

Na botanicznych wycieczkach (w gimnazjum przed wojną) byłem zaskoczony, jak nieporównanie więcej niż my, uczniowie, widział ze świata roślin nasz nauczyciel (wybitny botanik Stanisław Tołpa): bo znał nazwę każdego z tych kwiatów i wiedział dużo o każdym z tych gatunków. Było to jeszcze jedno potwierdzenie słynnego powiedzenia: „widzi się tylko to, co się wie” i bardziej okrutnej prawdy, że nikt nie jest tak ślepy jak ten, który nie chce wiedzieć. Gdy wspominałem o tych spostrzeżeniach memu prawie niewidomemu przyjacielowi – namiętnemu zbieraczowi kwiatów górskich – opowiedział mi następujące wydarzenie: Kilka lat temu, będąc w zachodnich Tatrach, na pewnej hali zobaczył rosnący obok szałasuski wysoki fioletowy kwiat

<sup>1</sup> W dalszym ciągu, ze względu na trudność ustalenia, na ogół nie podajemy źródła cytatu ani tłumacza (najczęściej jest nim zapewne Krzysztof Maurin).

(tojad, łac. *Aconitum*). Zapraǳnął dowiedzieć się, jaka jest jego góralska nazwa. Zapytany stary pasterz ze zdziwieniem popatrzył na piękny kwiat – wyraźne było, że pierwszy raz go widzi (choć co dzień jego oko padało na ten tojad dziesiątki razy) i rzekł niepewnie: „no – kwiatek!”.

Zauważono, że górale (także szwajcarscy!) nie widzą szczytu, którego nazwy nie znają. Wybitny socjolog Eugen Rosenstock-Huessy pisze w związku z tą obserwacją:

Nie potrafimy niczemu się przyjrzeć (*anschauen*), o ile tego nie nazwiemy... Coś nowo zobaczonego staje się widzialne dopiero w akcie nazwania. Wszystkie odkrycia, wszelkie spostrzeżenia i wynalazki polegają na tym, że w końcu my wszyscy widzimy to, co kogoś najpierw tak silnie poruszyło, że nazwał je i przez to wymusił zwrócenie na to uwagi. Dopiero nazwanie odkrywa, realizuje widzenia (*Anschauung*). Widzenie, które nie przebiło się do nazwania, jest zamazane i mgliste, jest co najwyżej embrionem...

W podobnym sensie powiada wybitny filozof Otto F. Bollnow: „Słowo nie jest czymś późniejszym, co dołącza się do istniejącej już przedtem rzeczy (*Ding*), lecz dopiero słowo tworzy tę rzecz”. Także językoznawstwo od czasu Wilhelma Humboldta do Benjamina L. Whorfa powtarza te twierdzenia: każdy język tworzy określone widzenie świata (*Weltsicht*), a nawet tworzy nowy szczególnie świat. Różne rodziny językowe określają różne „światy”, w których żyją dorośli ludzie i w które wchodzą dzieci, ucząc się mowy ojczystej: „Każdy język jest olbrzymim specyficznym systemem struktur, w którym formy i kategorie są kulturowo z góry określone, na których gruncie poszczególne człowiek nie tylko komunikuje i udziela, lecz także rozczłonowuje przyrodę, zauważa zjawiska i związki, rozumie je, kanalizuje swe zmysły i uwagę, i buduje aparat swej świadomości” (Whorf). Dla Whorfa być może jeszcze ważniejsza niż słownictwo jest gramatyka. Przypuszcza on, że może to, co nazywamy myśleniem naukowym, stanowi wytwór zachodniego i indoeuropejskiego typu językowego, i suponuje, że może trudności i granice, na jakie napotyka współczesna fizyka w związku z pojęciem pola kwantowego przekracza już granicę tego, co się da adekwatnie ująć za pomocą środków naszej grupy językowej.

Jak mi się wydaje, są tu pewne analogie między pojęciowością fizyki cząstek elementarnych a filozofią hinduską i buddyjską (Fritjof Capra).

Te obserwacje, które zawdzięczamy badaczom języka, mają bardzo poważne konsekwencje teoriopoznawcze (filozoficzne): języki zmieniają się z biegiem czasu, ale języki, jak widzieliśmy, stanowią a priori poznawcze. Oznacza to wbrew Immanuelowi Kantowi (i chyba Platonowi), że to a priori się zmienia (Max Scheler, Bollnow): świat jest do gruntu historyczny, nie tylko jego rozumienie.

### 1.3. Potęga słowa

Jezyk jest nie tylko organem poznania, który dany jest człowiekowi do swobodnej dyspozycji, którym może się dowolnie posługiwać. Jezyk to jednocześnie potęga, która ma człowieka w swej mocy. Znane jest – z prymitywnego myślenia – przekonanie o magicznym znaczeniu słowa.

- A. Posiadanie (znajomość) imienia, nazwy daje już jakąś władzę nad jego nosicielem.
- B. W obszarze kultowym, ale także w kontaktach międzyludzkich wypowiedzenie pewnych słów (przekleństwo, zaklęcie, również przebaczenie, odpuszczenie) może człowieka uwolnić lub – w jakimś zakresie – zniewolić.

Wiemy z własnego doświadczenia, że działanie to do pewnego stopnia jest niezatarte, np. obraza, oczernienie kogoś. Zapewne tego rodzaju doświadczenia były w prymitywnych społecznościach źródłem przekonania, że zniewagę należy pomścić krwią (nawet do trzeciego pokolenia).

Tak więc coś raz wypowiedziane zmienia rzeczywistość i to w sposób w pewnym sensie nieodwracalny. To jest niewątpliwie źródłem i potrzebą przysięgi, a (nieuświadomiona zwykle) wiedza o potędze słowa zapewne stanowi przyczynę, dlaczego zakochany chce usłyszeć (explicitel!) wyznanie kochanej osoby „kocham cię” – i ta wiedza w gruncie rzeczy powoduje trudność i – u głębszych natur – opór przed wypowiedzeniem tych słów: stanie się coś, co niełatwo będzie wymazać.

Bollnow przypuszcza, że ta potęga słowa polega na stosunku między formą i brakiem uformowania. „Wypowiedziane wydziela się z mglistego tła i dopiero teraz staje się w pełni rzeczywiste... Nabrało kształtu i stałości, i jako takie się ostaje”.

Być może pismo (zapis) jest rodzajem uformowania. I poezja, sztuka (a więc i matematyka) są nie tylko procesem, lecz także formowaniem rzeczywistości.

### 1.4. Matematyka jako proces i konstrukcja symboliczna

Rozumienie tego zjawiska, jakim jest matematyka, utrudnia pogląd, że matematyka czy w szczególności jakieś twierdzenie matematyczne stanowi ustalony fakt, że jest gotowym tekstem, że jest tym, co znajduje się w podręcznikach, monografiach i pismach fachowych. Pogląd ten należy uznać za częściowo prawdziwy: spalanie całej literatury matematycznej i zakazanie przez trzy pokolenia uprawiania i nauczania matematyki przerwałoby być może na zawsze ten proces, tę olbrzymią rzekę (a raczej dorzecze), która płynie, wydarza się

i bije z coraz to nowszych źródeł (genialni twórcy i ich szkoły) od przeszło dwu i pół tysiąca lat. Zapewne spiętrzona w ten sposób energia znalazłaby ujście w jakiejś innej twórczości i innej sztuce, może spowodowałaby nowy rozkwit innej nauki, innej sztuki, podobnie jak obrazoburstwo protestanckie spowodowało wspaniały wybuch muzyki kościelnej baroku?... Ale matematyka jest organizmem żywym, który jedynie dla wygody dzieli się na teorie, twierdzenia, lematy. Twierdzenie matematyczne nabiera pełni rzeczywistości, dopiero gdy jest rozumiane przez czytającego, dopiero w rozumiejącym przebieganiu kroków jego dowodu, dopiero w świadomości powiązania go z innymi twierdzeniami i pojęciami teorii, w widzeniu jego zastosowań w fizyce czy innych działach matematyki. Jako tekst w monografii trwa w uśpieniu, czekając jak owa królewna w baśni na oblubieńca, który obudzi ją do prawdziwego, pełnego istnienia.

Ta metafora ułatwia nam zrozumienie, że prawdziwość, a więc rzeczywistość matematyki nie jest czymś gotowym, jest wydarzeniem, jak ów pocałunek i zaślubiny ze światem baśni. Podkreślamy, że wraz z królewną budzi się cały uśpiony zamek, całe królestwo: to wydarzenie aktu poznania ma olbrzymie – kosmiczne, chciałoby się rzec – konsekwencje.

Dochodzimy tu do niezwykle ważnej sprawy: symbolu, symboliczności rzeczywistości, co właśnie na przykładzie matematyki jest szczególnie wyraźnie widoczne.

*Symbolon* oznacza po grecku wydarzenie, które nas spotyka, ale dzięki temu spotyka, że jest jakoś z nami wewnętrznie związane, spokrewnione, choć „zderza” się z nami, spotyka nas jak gdyby z zewnątrz. To spotykające (*Begegnung, encounter*) współtworzymy w wewnętrznym spotkaniu, reprezentujemy, doprowadzamy do tego, że się realizuje.

Symbol nie jest tylko jakimś umownym znakiem! Jak rzekł pewien wybitny współczesny teolog: „Istniejące (byt) jest z konieczności (ze swej natury) symboliczne(y), ponieważ z konieczności wyraża się, by znaleźć swą naturę”. I na odwrót. „Symbol przynależy do istotnej konstytucji realizowania się jednego bytu w drugim”. Te filozoficzne tezy powodują, że jakaś rzecz, jakaś istota, by w pełni istnieć, by się urzeczywistnić, by zyskać pełną egzystencję, potrzebuje drugiego, by być przez niego poznana i kochana, by w pełni móc się rozwinąć i stać się sobą. W psychologii i psychiatrii rzecz to doskonale znana; ważne i interesujące, że jest to prawdziwe w każdym spotkaniu, w każdym poznaniu: rzeczywistość stanowi symbol – przychodzi do siebie w poznaniu. To z kolei jest dobrze znane w matematyce: twierdzenia (i pojęcia) matematyczne są odkrywane i jednocześnie tworzone w poznaniu – są symbolami w pełnym tego słowa znaczeniu. Filozof zauważa, że to, co jest nam dobrze znane w psychologii (psychiatrii) i matematyce – a więc jak gdyby na przeciwnych krańcach istnienia – jest wszędzie i zawsze obowiązujące.

By ułatwić zrozumienie tego, że „nie ma rzeczywistości bez języka”, że tzw. obiektywna rzeczywistość jest abstrakcją – wprawdzie bardzo pożyteczną abstrakcją, bez której nie ma techniki – przytoczę sławny tekst: wyjątek listu wodza Indian do prezydenta USA z roku 1854. Wtedy to rząd w Waszyngtonie zaproponował wodzowi Seattle wykupienie terenów, na których żyły niedobitki jego szczepu.

Jakże możecie chcieć kupować Niebo i ciepło Ziemi lub je sprzedawać? Myśl ta jest nam obca. Nie do nas należy ani świeże powietrze, ani mieniąca się woda. Jakże chcecie je kupić? Każde miejsce tej Ziemi jest święte dla mego ludu. Każda lśniąca igła jodłowa, każdy piaszczysty brzeg rzeki, każda polana, wszelkie brzęczenie owada jest zrośnięte z mym ludem... Jesteśmy częścią tej Ziemi, a ona jest naszą częścią. Pachnące kwiaty są naszymi siostrami, jeleń, koń i wielki orzeł są naszymi braćmi. Skaliste zbocze, ciepło konia, ciepło człowieka, wszystko to jest tą samą rodziną... Pomimo wszystko jesteście być może naszymi braćmi. Jesteśmy pewni, że biały człowiek odkryje któregoś dnia, że jego Bóg i nasz Bóg są tym samym... Być może wydaje się białemu człowiekowi, że Go [Boga – K.M.] posiada, tak jak wy chcecie posiadać naszą Ziemię. Ale to nie jest możliwe... Ziemia jest Mu zbyt droga, a zadanie jej krzywdy napełniłoby Stwórcę podejrzliwością... Gdy wasze miejsca zamieszkania będą choć raz zarażone, udusicie się we własnych śmieciach...

I teraz następują tragiczne, ale jakże prorocze zdania owego listu:

Wiemy, że biały człowiek nie rozumie naszych obyczajów. Jedno miejsce na Ziemi wydaje mu się takie samo jak inne, ponieważ jest obcym, który przychodzi w nocy i zabiera Ziemi to, co jest mu potrzebne. Jest Ona mu wrogiem, nie siostrą. I gdy jedno miejsce zdobył, idzie po nowe... Obchodzi się ze swą Matką Ziemią, ze swym Bratem Niebem jak z przedmiotami, które się kupuje, rabuje, sprzedaje jak owce czy lśniące perły. Jego chciwość pożre Ziemię i pozostawi pustynię...

Wydaje się nam (tzn. współczesnym ludziom Zachodu), że świat, że rzeczywistość jest dokładnie tym, co my za rzeczywistość uważamy, tym, co wpojono nam w szkole i na uniwersytecie, że jest to świat wykształconego Europejczyka drugiej połowy XX wieku. Wypowiedź indiańskiego wodza świadczy wymownie, że nie możemy mówić o świecie, abstrahując od człowieka, który tę rzeczywistość realizuje, bez języka, który tę rzeczywistość otwiera i współtworzy. Jak pokazuje w sposób przekonujący wybitny filozof, znawca religii Raimundo Panikkar, świat, człowiek, Bóg stanowią nierozdzielalną całość. Mówienie o jednym z nich (czy nawet o dwóch tylko) jest już abstrakcją. Świadomość tej jedności nazywa on kosmoteandryczną intuicją (por. jego piękny artykuł *Colligite fragmenta: For an Integration of Reality*).

## 1.5. Matematyka jako sztuka

Od samego zarania matematyki (pitagorejczycy) podkreślano bliskość matematyki i sztuki – przede wszystkim muzyki, stąd symbol harmonii sfer. Jednak o wiele częściej przeciwstawia się naukę, a zwłaszcza oschłą matematykę, sztuce, poezji: tam czyste (ale martwe i zimne) poznanie, tu świat fantazji. Jak fałszywy jest ten przesąd, ilustruje następująca anegdota: gdy David Hilbert, jeden z największych matematyków i logików matematycznych naszego stulecia, dowiedział się, że jeden z jego uczniów zdradził matematykę, by zostać poetą, rzekł w zadumie: „Tak, tak, na matematyka miał on zbyt mało fantazji”. Nie wiem, czy tamten młody człowiek został dobrym poetą, ale by przekonać czytelnika o fantazji i pięknie matematycznych budowli, pokażę w drugiej części niniejszego artykułu konstrukcję kielka funkcji, jego przedłużenie i powstawanie powierzchni Riemanna.

Podobnie jak pisząc o języku, musieliśmy podkreślić jego poznawczą, twórczą rolę, by zrozumieć matematykę jako sztukę, musimy podkreślić aspekt poznawczy sztuki, który niektórzy filozofowie uważają za jej najważniejszą cechę.

Może najpierw znów kilka prostych przykładów i obserwacji. Prymitywna teoria sztuki uważała ją za odbicie (gotowej) rzeczywistości – tym lepsze, im dokładniejsze (wierniejsze). Powstanie barwnej fotografii poważnie zachwiało tym poglądem, który część filozofów sztuki, pisarzy, eseistów już od dawna zwalczała. Oscar Wilde w jednej ze swych słynnych paradoksalnych obserwacji zauważa:

To nie sztuka naśladuje przyrodę, to przyroda naśladuje sztukę... Przed impresjonistami nikt nie widział mgły i smogu w Londynie. Obecnie dzięki impresjonistom nie tylko się ją widzi, lecz można nawet zachorować na astmę.

Powiedzenie Wilde’a jest tylko w niewielkim stopniu przesadą: pejzażyści holenderscy i romantyczni umożliwili zwykłemu człowiekowi widzenie krajobrazu. Luter dwukrotnie przekraczał Alpy, lecz ich nie widział (choć zapewne pocił się zdrowo!). Znaną jest rzeczą, że amatorscy fotografowie robią zdjęcia zawsze tych samych sławnych obiektów i krajobrazów: malarze nauczyli ich widzieć np. ruiny zamku w Heidelbergu, kamieniczki w Kazimierzu. Dopiero gdy rzeczywistość została przez artystę uformowana w przekonujący sposób – przekształcona w dzieło sztuki – dzieło to staje się organem poznawczym pozwalającym widzieć innym. Wielki filozof sztuk plastycznych Conrad Fiedler (1841–1895) powiada już przed Wilde’em (który na pewno go nie znał, ten zapoznany filozof i teoretyk sztuki przeżywa renesans): „Człowiek poznaje przyrodę dopiero z dzieł artystów, a niezgodność, którą zwykle znajduje między przyrodą a dziełem sztuki, polega zazwyczaj na nierozwiniętym, banalnym stanie jego widzenia przyrody”. I dalej pisze Fiedler:

Sztuka nie ma do czynienia z postaciami, które zastaje (ona) przed swą działalnością i niezależnie od niej, lecz od początku do końca działalność sztuki polega na tworzeniu postaci, które dopiero dzięki niej zyskują byt. To, co tworzy, nie jest jakimś innym światem obok drugiego świata, który egzystuje bez sztuki, to ona wyłania dopiero świat dzięki artystycznej świadomości i dla niej [tej świadomości – K.M.]. I tak nie ma ona [sztuka – H.M.] do czynienia z materiałem, który stał się w jakiś sposób duchową własnością człowieka, to sztuka jest procesem, który bezpośrednio wzbogaca (duchowy) stan posiadania człowieka. To nie artysta potrzebuje przyrody, to przyroda potrzebuje człowieka. Niczego innego przyroda nie daje artyście niż innemu człowiekowi, tylko że artysta potrafi inaczej to wykorzystać (wywartościować). To przyroda zyskuje dzięki działalności artysty i każdemu, kto potrafi iść za nim [artystą – K.M.] w jakiś bogatszy i wyższy byt. Powstaje w ten sposób artystyczna (*künstlerische*) świadomość. Duchowe życie artysty polega na ustawicznym wyłanianiu tej artystycznej świadomości. To właśnie jest istotnym artystycznym tworzeniem, którego zewnętrznym rezultatem jest wyłanianie dzieł sztuki. Wszędzie, gdzie ludzie mieszkają, występuje ta działalność, jest ona konieczna, nie dlatego, że ludzie potrzebują efektów tej działalności, lecz dlatego, że ludzie otrzymali siły, by działać w ten sposób.

Widzimy, że Fiedler widzi w wyłanianiu artystycznej świadomości przez każdego człowieka istotny rys człowieczeństwa. Sam Fiedler nie był artystą, lecz przyjacielem i mecenasem malarzy i rzeźbiarzy. Można by zamiast słowa „sztuka” podstawić „matematyka”, a zamiast „artystyczny” – „matematyczny”, a otrzymamy wypowiedź, o którą chodzi autorowi niniejszej pracy. Matematyka (i sztuka) nabiera w ten sposób olbrzymiego znaczenia nie tylko dla ludzkości, lecz także dla świata – ale sprawa ta wymagałaby osobnego artykułu.

## 1.6. Twórczość matematyczna

Gdy czytać wspomnienia czy (auto)biografie wielkich matematyków, rzuca się w oczy uderzające podobieństwo przeżyć w czasie aktu tworzenia: długi, nieraz lata trwający okres wyteźonej pracy, koncentracji, medytacji... Nieudane próby, w końcu porzucenie tematu... Potem nagle oświecenie, objawienie: błyskawiczne zobaczenie związków i zarysów teorii. Takich przeżyć nawet najwięksi matematycy mieli najwyżej kilka w swoim życiu. Związane z tym było zawsze uczucie szczęścia, wdzięczności za ten niezasłużony dar. Potrzeba jednak jeszcze wiele pracy, by inspirację, iluminację przekształcić w formę przyjętą za dowód matematyczny. Jak powiedział David Hilbert: „75% geniuszu to pracowitość”. Patrzącemu z zewnątrz ta twórczość wydać się może czasem opętaniem, od którego nie ma ucieczki. Czym się to różni od manii czy obłędnej



*idée fixe*? Jedynie owocem! Choć może maniak nie tak trudno odróżnić od prawdziwego inspirowanego twórcy – maniak zwykle nie zna obecnego stanu badań, nie chce się uczyć, często jest nawet niezdolny: nie potrafi zrozumieć dłuższego dowodu matematycznego. Poprzestaje na definicjach, które wydają mu się nową teorią.

Ale nawet u wielkich matematyków okres pracy naprawdę twórczej jest zwykle krótki: Bernhard Riemann zmarł w wieku niespełna 40 lat, a zaczął tworzyć dość późno, Niels Henrik Abel (największy norweski matematyk) i Évariste Galois byli młodzieńcami, gdy zabrała ich śmierć. U tych, którym dane było żyć długo, następował moment, gdy źródło inspiracji zaczynało wygasać, by w końcu ustać zupełnie. Są to, podobnie jak u artystów (u których okres twórczy jest zwykle dłuższy), tragiczne momenty: pozostaje świetna technika, produkuje się niezłe wyroby, ale to nie jest TO. Niemal żadnemu nie udaje się przestać „tworzyć” – jako że tworzenie było sensem ich życia. U matematyków – bo matematyka jest jednak nauką i matematyk płynie w rzece procesu matematycznego – w parze z traceniem bystrości intelektualnej i pamięci przychodzi niezdolność śledzenia wielkich osiągnięć młodszych kolegów. Gdy stary twórca jest mądrym człowiekiem (co równie rzadkie jak u „zwykłych” ludzi), cieszą go postępy jego nauki, zwykle niestety następuje rozgoryczenie: narzekanie na wyrodzenie się dyscypliny, zajmowanie się „niewłaściwą” problematyką i ucieczka we wspomnienia osiągnięć młodości. Jest to tragiczne, ale matematyk też jest człowiekiem, a jedynie mądrość stanowi lekarstwo starości.

## 1.7. Nieprzetłumaczalność sztuk

Każda sztuka otwiera i tworzy inny wymiar rzeczywistości: gdyby malarstwo mogło udostępnić tę sferę rzeczywistości, która dostępna jest muzyce – nie byłoby malarstwa (muzyki?), podobnie gdyby prozą dało się wyrazić to, co tworzy poezja – nie byłoby poezji. Dlatego też każdy uczeń liceum odnosi się z niechęcią do rozbiorów i interpretacji wiersza, bo czuje, że jest to nieporozumienie, że poezji nie można wyrazić innym językiem niż poetyckim. Dlatego też na pytanie: „Co wyraża dany wiersz?” można jedynie sensownie odpowiedzieć: „Czytaj ten wiersz w skupieniu, a zobaczysz”. Dla przykładu przytoczę utwór (prozę poetycką) wielkiego pisarza i poety argentyńskiego Jorge Luisa Borgesa (w tłumaczeniu tragicznie zmarłego poety Edwarda Stachury) pt. *The Unending Gift* (Niekończący się dar).

Pewien malarz obiecał nam obraz.

Teraz, w New England, dowiedziałem się, że umarł. Doznałem, jak już nieraz, uczucia smutku i zdziwienia z odkrycia, że jesteśmy jak sen. Pomyślałem

o straconym człowieku i straconym obrazie. (Tylko bogowie mogą przyrzekać, albowiem są nieśmiertelni). Pomyślałem o miejscu wcześniej wybranym, którego płótno nie zajmie.

Pomyślałem potem: gdyby tu było, stałoby się z czasem jeszcze jedną rzeczą, jakąś tam rzeczą, chełpliwością lub częścią stroju mojego domu; a teraz jest nieogarnione, nieustające, zdolne przyoblec się w każdą formę i każdy kolor, z żadnym nie będąc związanym.

W jakiś sposób istnieje. Będzie rosło i żyło jak muzyka i będzie ze mną do końca. Dziękuję Ci, Jorge Larco. (Również ludzie mogą przyrzekać, albowiem jest w obietnicy coś nieśmiertelnego).

Nasuwa się niepokojące pytanie: po co więc piszę o matematyce? Przecież jest ona organem poznawczym ludzkości, za pomocą którego ludzkość poznaje i tworzy rzeczywistość niedostępną na innej drodze!

Jest więc już najwyższy czas, by przytoczyć jakiś utwór matematyczny – zwany twierdzeniem, pokazać, jak pewne pojęcia funkcjonują. Ta partia wykładu stanowi integralną jego część – dlatego też zachęcam czytelnika do podjęcia wysiłku śledzenia poniższych rozumowań.

## 1.8. Pola wektorowe na powierzchniach. Twierdzenie Poincarégo–Hopfa

Henri Poincaré (1854–1912) – największy francuski matematyk, wielki fizyk, interesujący filozof i świetny publicysta – zajmował się między innymi mechaniką niebios. Rozważania te, a także badania z dziedziny teorii funkcji analitycznych doprowadziły go do podstawowych badań nad naturą pól wektorowych, topologią powierzchni: Poincaré jest jednym z twórców topologii algebraicznej.

Pole wektorowe  $V$  na obszarze  $U \subset \mathbb{R}^2$  to odwzorowanie, które przyporządkowuje każdemu punktowi  $x \in U$  wektor  $V(x) \in \mathbb{R}^2$ . Rozważa się oczywiście także pola wektorowe na obszarach przestrzeni trójwymiarowych, np. pole prędkości cieczy (choćby Wisły pod Kazimierzem), gradient temperatury na obszarze Polski, pole prędkości wiatrów nad Europą Środkową – każdy zna mapki z prognozą pogody w telewizji. Poincaré zauważył, że bardzo ważne są punkty, w których pole wektorowe znika („cisza na morzu”) – te punkty nazywają się punktami osobliwymi (krytycznymi) pola  $V$ . Przywołane dalej trzy przykłady pokazują, w jak różny sposób pola zachowują się w otoczeniu punktu osobliwego  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ . Zob. rys. 1.

Wszystkie rozważane tu pola wektorowe są ciągłe – tzn. zmieniają się w sposób ciągły (a nawet różniczkowalny). Otaczając izolowany punkt osobliwy  $x_0$