Rozdział 1

Widmo operatora

1.1. C*-algebra operatorów na przestrzeni Hilberta

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Przestrzeń Banacha $\mathsf{B}(\mathcal{H})$ jest algebrą nad $\mathbb{C}$ z mnożeniem zdefiniowanym jako składanie operatorów. Algebra ta ma jedynkę (element neutralny mnożenia) – jest nią operator identycznościowy $\mathbb{1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Operacja brania operatora sprzężonego

$$\mathsf{B}(\mathcal{H}) \ni x \longmapsto x^* \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$$

jest antyliniową, antymultyplikatywną inwolucją (dla każdego $x \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ mamy $x^{**} = x$). Ponadto norma operatorowa jest zgodna ze strukturą algebry w tym sensie, że

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|, \qquad x, y \in \mathsf{B}(\mathcal{H}).$$

W szczególności $\mathsf{B}(\mathcal{H})$ jest *algebrą Banacha*.

Stwierdzenie 1.1. *Dla* $x \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ *mamy*

(1) $\|x\| = \|x^*\|$,
(2) $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Dowód. Obie równości są oczywiste, gdy $x = 0$. Przyjmijmy więc, że mamy $\|x\| > 0$. Wówczas oczywiście

$$\|x^*x\| \leqslant \|x^*\|\|x\|.$$

Dalej obliczamy

$$\begin{aligned}\|x^*x\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|x^*x\xi\| &= \sup_{\|\xi\|=1} \sup_{\|\eta\|=1} \bigl|\langle\eta|x^*x\xi\rangle\bigr| \\ &\geqslant \sup_{\|\xi\|=1} \bigl|\langle\xi|x^*x\xi\rangle\bigr| = \sup_{\|\xi\|=1} \|x\xi\|^2 = \|x\|^2.\end{aligned}$$

Zatem

$$\|x\|^2 \leqslant \|x^*x\| \leqslant \|x^*\|\|x\|. \tag{1.1}$$

Skracając $\|x\|$ po obu stronach otrzymujemy

$$\|x\| \leqslant \|x^*\|,$$

co na mocy symetrii pokazuje, że $\|x^*\| = \|x\|$, a podstawiając ten wynik do (1.1), otrzymujemy $\|x^*x\| = \|x\|^2$. $\square$

Uwaga 1.2. Zauważmy, że dowód stwierdzenia 1.1 można rozszerzyć również na przypadek, gdy x jest operatorem pomiędzy różnymi przestrzeniami Hilberta. Tak więc jeśli $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ są przestrzeniami Hilberta, to dla każdego $x \in \mathsf{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ mamy $\|x^*x\| = \|x\|^2$.

Stwierdzenie 1.1(1) mówi, że inwolucja $x \mapsto x^*$ na $\mathsf{B}(\mathcal{H})$ jest izometrią. Algebrę Banacha wraz z izometryczną antyliniową i antymultyplikatywną inwolucją nazywamy *$*$-algebrą Banacha*, natomiast $*$-algebrę Banacha, w której spełniony jest warunek (2) ze stwierdzenia 1.1 nazywamy *C*-algebrą*. Tak więc $\mathsf{B}(\mathcal{H})$ jest C*-algebrą.

Co więcej, każda normowo domknięta $*$-podalgebra[2] $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}(\mathcal{H})$ także jest C*-algebrą. Dla dowolnego podzbioru $S \subset \mathsf{B}(\mathcal{H})$ istnieje najmniejsza C*-algebra $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}(\mathcal{H})$ zawierająca S. Nazywamy ją C*-algebrą *generowaną* przez S i oznaczamy symbolem $\mathrm{C}^*(S)$. Nietrudno wykazać, że $\mathrm{C}^*(S)$ jest domknięciem zbioru kombinacji liniowych dowolnych iloczynów elementów zbioru S i $S^* = \{s^* \,|\, s \in S\}$. Dla $x \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ będziemy pisać $\mathrm{C}^*(x)$ oraz $\mathrm{C}^*(x,\mathbb{1})$ zamiast $\mathrm{C}^*(\{x\})$ i $\mathrm{C}^*(\{x,\mathbb{1}\})$.

Przykładem C*-algebry jest także przestrzeń $\mathrm{C}(X)$ dla zwartej przestrzeni X z normą jednostajną $\|\cdot\|_\infty$, punktowym dodawaniem i mnożeniem oraz inwolucją $f \mapsto \overline{f}$. Pozornie innym przykładem jest przestrzeń $\mathrm{C_b}(Y)$ ograniczonych funkcji ciągłych na lokalnie zwartej przestrzeni Y z normą $\|\cdot\|_\infty$ i punktowymi działaniami. Jest to przykład tylko pozornie odmienny, gdyż w istocie $\mathrm{C_b}(Y)$ jest naturalnie izomorficzna z $\mathrm{C}(\beta Y)$, gdzie βY jest uzwarceniem Čecha–Stone'a przestrzeni Y.[3]

1.2. Widmo i promień spektralny

Niech $x \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$. Przypomnijmy, że x jest *odwracalny*, jeśli istnieje operator $y \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ taki, że $xy = yx = \mathbb{1}$. *Zbiorem rezolwentowym* x nazywamy

$$\rho(x) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, \text{operator } \lambda\mathbb{1} - x \text{ jest odwracalny}\big\},$$

a jego dopełnienie $\sigma(x) = \mathbb{C} \setminus \rho(x)$ nazywamy *widmem* lub *spektrum* operatora x.

Wiadomo, że zbiór operatorów odwracalnych jest otwarty, a $\rho(x)$ jest przeciwobrazem tego zbioru przy ciągłym odwzorowaniu

$$\mathbb{C} \ni \lambda \longmapsto \lambda\mathbb{1} - x \in \mathsf{B}(\mathcal{H}),$$

co pokazuje, że zbiór rezolwentowy jest otwarty. Co więcej, jeśli $\lambda_0 \in \rho(x)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ spełnia

$$|\lambda - \lambda_0| < \tfrac{1}{\|(\lambda_0\mathbb{1} - x)^{-1}\|},$$

[2] Podprzestrzeń wektorowa zamknięta na składanie operatorów i operację brania operatora sprzężonego.

[3] Por. [Eng, Wniosek 3.6.3].

to $\lambda \in \rho(x)$ i

$$(\lambda\mathbb{1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0\mathbb{1} - x)^{-n-1}.$$

W szczególności odwzorowanie $\rho(x) \ni \lambda \mapsto (\lambda\mathbb{1} - x)^{-1} \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ (zwane *rezolwentą* operatora x) jest holomorficzne.

Uwaga 1.3. Dla dowolnych $\lambda, \mu \in \rho(x)$ mamy

$$(\lambda\mathbb{1} - x)^{-1} - (\mu\mathbb{1} - x)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda\mathbb{1} - x)^{-1}(\mu\mathbb{1} - x)^{-1}. \tag{1.2}$$

(w szczególności wartości rezolwenty x w różnych punktach $\rho(x)$ są przemienne). Istotnie: wzór jest oczywisty dla $\lambda = \mu$, a dla $\lambda \neq \mu$ łatwo sprawdzamy, że

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{\mu-\lambda}\big((\lambda\mathbb{1} - x)^{-1} - (\mu\mathbb{1} - x)^{-1}\big)(\mu\mathbb{1} - x)(\lambda\mathbb{1} - x) \\
&\qquad = \tfrac{1}{\mu-\lambda}\big((\lambda\mathbb{1} - x)^{-1}(\mu\mathbb{1} - x) - \mathbb{1}\big)(\lambda\mathbb{1} - x) \\
&\qquad = \tfrac{1}{\mu-\lambda}\big((\lambda\mathbb{1} - x)^{-1}\big((\mu - \lambda)\mathbb{1} + (\lambda\mathbb{1} - x)\big) - \mathbb{1}\big)(\lambda\mathbb{1} - x) \\
&\qquad = \tfrac{1}{\mu-\lambda}\big((\mu - \lambda)(\lambda\mathbb{1} - x)^{-1} + \mathbb{1} - \mathbb{1}\big)(\lambda\mathbb{1} - x) = \mathbb{1}
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
&(\mu\mathbb{1} - x)(\lambda\mathbb{1} - x)\tfrac{1}{\mu-\lambda}\big((\lambda\mathbb{1} - x)^{-1} - (\mu\mathbb{1} - x)^{-1}\big) \\
&\qquad = \tfrac{1}{\mu-\lambda}(\mu\mathbb{1} - x)\big(\mathbb{1} - (\lambda\mathbb{1} - x)(\mu\mathbb{1} - x)^{-1}\big) \\
&\qquad = \tfrac{1}{\mu-\lambda}(\mu\mathbb{1} - x)\big(\mathbb{1} - \big((\lambda - \mu)\mathbb{1} + (\mu\mathbb{1} - x)\big)(\mu\mathbb{1} - x)^{-1}\big) \\
&\qquad = \tfrac{1}{\mu-\lambda}(\mu\mathbb{1} - x)\big(\mathbb{1} - (\lambda - \mu)(\mu\mathbb{1} - x)^{-1} + \mathbb{1}\big) = \mathbb{1},
\end{aligned}$$

czyli operator $(\mu\mathbb{1} - x)(\lambda\mathbb{1} - x)$ jest odwracalny, a jego odwrotnym jest $\frac{1}{\mu-\lambda}\big((\lambda\mathbb{1}-x)^{-1}-(\mu\mathbb{1}-x)^{-1}\big)$. Wzór (1.2) nazywamy *wzorem rezolwentowym* lub *tożsamością rezolwentową*.

Stwierdzenie 1.4. *Niech $x, y \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$. Wtedy*

$$\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}. \tag{1.3}$$

Dowód. Niech $\lambda \in \rho(yx)\setminus\{0\}$. Operator $\lambda\mathbb{1} - xy$ jest odwracalny, gdyż

$$\begin{aligned}
&(\lambda\mathbb{1} - xy)\Big(\tfrac{1}{\lambda}\big(\mathbb{1} + x(\lambda\mathbb{1} - yx)^{-1}y\big)\Big) \\
&\qquad = \tfrac{1}{\lambda}\big(\lambda\mathbb{1} - xy + (\lambda\mathbb{1} - xy)x(\lambda\mathbb{1} - yx)^{-1}y\big) \\
&\qquad = \tfrac{1}{\lambda}\big(\lambda\mathbb{1} - xy + x(\lambda\mathbb{1} - yx)(\lambda\mathbb{1} - yx)^{-1}y\big) \\
&\qquad = \tfrac{1}{\lambda}(\lambda\mathbb{1} - xy + xy) = \mathbb{1}
\end{aligned}$$

i

$$\Big(\tfrac{1}{\lambda}\big(\mathbb{1} + x(\lambda\mathbb{1} - yx)^{-1}y\big)\Big)(\lambda\mathbb{1} - xy)$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{\lambda}\big(\lambda\mathbb{1} - xy + x(\lambda\mathbb{1} - yx)^{-1}y(\lambda\mathbb{1} - xy)\big)\\
&= \tfrac{1}{\lambda}\big(\lambda\mathbb{1} - xy + x(\lambda\mathbb{1} - yx)^{-1}(\lambda\mathbb{1} - yx)y\big)\\
&= \tfrac{1}{\lambda}(\lambda\mathbb{1} - xy + xy) = \mathbb{1},
\end{aligned}
$$

czyli operator $\frac{1}{\lambda}\big(\mathbb{1} + x(\lambda\mathbb{1} - yx)^{-1}y\big)$ jest odwrotny do $(\lambda\mathbb{1} - xy)$, a więc $\lambda \in \rho(xy)\setminus\{0\}$. Tym samym wykazaliśmy, że $\rho(yx)\setminus\{0\} \subset \rho(xy)\setminus\{0\}$. Na mocy symetrii także $\rho(xy)\setminus\{0\} \subset \rho(yx)\setminus\{0\}$, a stąd $\rho(xy)\setminus\{0\} = \rho(yx)\setminus\{0\}$. Innymi słowy $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$. □

Uwaga 1.5. Odejmując zbiór $\{0\}$ od obu stron wzoru (1.3), otrzymujemy jego inne sformułowanie:

$$\sigma(xy)\setminus\{0\} = \sigma(yx)\setminus\{0\},$$

które również bywa bardzo użyteczne.

Stwierdzenie 1.6. *Mamy* $\big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, |\lambda| > \|x\|\big\} \subset \rho(x)$.

Dowód. Jeśli $|\lambda| > \|x\|$, to szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}x^n = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n}x^n$$

jest zbieżny, gdyż $\|\lambda^{-n}x^n\| \leqslant \Big(\frac{\|x\|}{|\lambda|}\Big)^n$. Łatwo sprawdzić, że jego suma jest operatorem odwrotnym do $\lambda\mathbb{1} - x$. □

W szczególności dla dowolnego $x \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ mamy

$$\sigma(x) = \mathbb{C}\setminus\rho(x) \subset \mathbb{C}\setminus\big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, |\lambda| > \|x\|\big\} = \big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, |\lambda| \leqslant \|x\|\big\},$$

czyli widmo x jest zbiorem domkniętym i ograniczonym (a więc zwartym).

Twierdzenie 1.7. *Dla dowolnego* $x \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ *mamy*

(1) $\sigma(x)$ *jest zbiorem niepustym,*

(2) *ciąg* $\big(\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest zbieżny i*

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \sup\big\{|\lambda| \,\big|\, \lambda \in \sigma(x)\big\}.$$

Dowód. Zdefiniujmy

$$\alpha(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}, \qquad x \in \mathsf{B}(\mathcal{H}).$$

Weźmy $\varepsilon > 0$. Istnieje taka liczba $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, że $\|x^{n_\varepsilon}\|^{\frac{1}{n_\varepsilon}} \leqslant \alpha(x) + \varepsilon$, albo inaczej

$$\|x^{n_\varepsilon}\| \leqslant \big(\alpha(x) + \varepsilon\big)^{n_\varepsilon}.$$

Teraz dowolną liczbę naturalną n dzielimy z resztą przez n_ε, tj. znajdujemy $q, r \in \mathbb{Z}_+$ takie, że

$$n = qn_\varepsilon + r$$

i $r < n_\varepsilon$. Mamy

$$\|x^n\| = \|x^{qn_\varepsilon}x^r\| \leqslant \|x^{n_\varepsilon}\|^q\|x\|^r \leqslant \big(\alpha(x)+\varepsilon\big)^{qn_\varepsilon}\|x\|^r = \big(\alpha(x)+\varepsilon\big)^{n-r}\|x\|^r.$$

Stąd

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \big(\alpha(x)+\varepsilon\big)^{1-\frac{r}{n}}\|x\|^{\frac{r}{n}}.$$

Tak więc

$$\alpha(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \limsup_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \alpha(x)+\varepsilon.$$

Ponieważ ε jest dowolnie mały, widzimy, że ciąg $\big(\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny (do $\alpha(x)$).

W szczególności, jeśli $x, y \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ są przemienne, to

$$\begin{aligned}\alpha(xy) &= \lim_{n\to\infty}\big\|(xy)^n\big\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\|x^ny^n\|^{\frac{1}{n}}\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\|y^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \alpha(x)\alpha(y).\end{aligned}$$

Jeśli $|\lambda| > \alpha(x)$, to szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\|x^n\|}{|\lambda|^n}$ jest zbieżny, więc zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}x^n$$

i łatwo sprawdzamy, że jego suma jest operatorem odwrotnym do $\mathbb{1} - \frac{x}{\lambda}$. Stąd $\lambda\mathbb{1} - x$ jest operatorem odwracalnym. Tym samym pokazaliśmy, że

$$\alpha(x) \geqslant \sup\big\{|\lambda| \,\big|\, \lambda \in \sigma(x)\big\}. \tag{1.4}$$

Dla dowodu przeciwnej nierówności i faktu, że widmo x jest niepuste, rozważmy dwa przypadki.

1. Jeśli $\alpha(x) = 0$, to x nie jest odwracalny, czyli $0 \in \sigma(x)$. Istotnie: gdyby x był odwracalny, mielibyśmy

$$1 = \alpha(\mathbb{1}) = \alpha(xx^{-1}) \leqslant \alpha(x)\alpha(x^{-1}) = 0.$$

2. Jeśli $\alpha(x) > 0$, to przypuśćmy, że $\alpha(x) > \sup\big\{|\lambda| \,\big|\, \lambda \in \sigma(x)\big\}$. Ponieważ $\sigma(x)$ jest zbiorem zwartym, istnieje $r \in \big]0, \alpha(x)\big[$ o tej własności, że

$$\sigma(x) \subset \big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, |\lambda| \leqslant r\big\}.$$

Tak więc zbiór $D = \big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, |\lambda| > r\big\}$ zawiera się w $\rho(x)$. Dla dowolnego ciągłego funkcjonału φ na $\mathsf{B}(\mathcal{H})$ funkcja

$$D \ni \lambda \longmapsto \varphi\big((\lambda\mathbb{1} - x)^{-1}\big) \in \mathbb{C}$$

jest holomorficzna. Ponadto, dla $|\lambda| > \alpha(x)$ mamy

$$\varphi\big((\lambda\mathbb{1} - x)^{-1}\big) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}\varphi(x^n).$$

Funkcja ta znika[4], gdy $\lambda \to \infty$, więc

$$f(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu = 0, \\ \varphi\big(\big(\frac{1}{\mu}\mathbb{1} - x\big)^{-1}\big), & 0 < |\mu| < \frac{1}{r} \end{cases}$$

definiuje funkcję analityczną na $D^{-1} = \big\{\mu \in \mathbb{C} \,\big|\, |\mu| < \frac{1}{r}\big\}$ o rozwinięciu Taylora wokół zera

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{n+1}\varphi(x^n).$$

Rozwinięcie to musi być zbieżne na całym kole D^{-1}, a więc także dla $\mu = \frac{1}{\lambda_0}$ takich, że $r < |\lambda_0| < \alpha(x)$.

W szczególności dla $\mu \in D^{-1}$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \mu^{n+1}\varphi(x^n) = 0.$$

Weźmy więc λ_0 taką, że $r < |\lambda_0| < \alpha(x)$. Wtedy $\lambda_0^{-1} \in D^{-1}$ i

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_0^{-n-1}\varphi(x^n) = 0.$$

Rozważmy rodzinę (ciąg) ciągłych funkcjonałów liniowych na $\mathsf{B}(\mathcal{H})^*$ danych przez

$$\mathsf{B}(\mathcal{H})^* \ni \varphi \longmapsto \lambda_0^{-n-1}\varphi(x^n) \in \mathbb{C}.$$

Z twierdzenia Banacha–Steinhausa wynika, że istnieje stała $c < +\infty$ taka, że

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_0|^{-n-1}\|x^n\| = c.$$

Stąd

$$\|x^n\| \leqslant c|\lambda_0|^{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

a w konsekwencji

$$\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \lim_{n\to\infty} c^{\frac{1}{n}}|\lambda_0|^{1+\frac{1}{n}} = |\lambda_0| < \alpha(x).$$

Sprzeczność ta pokazuje, że nie jest możliwe, aby $\alpha(x) > \sup\big\{|\lambda| \,\big|\, \lambda \in \sigma(x)\big\}$. Innymi słowy mamy

$$\alpha(x) \leqslant \sup\big\{|\lambda| \,\big|\, \lambda \in \sigma(x)\big\},$$

co w połączeniu z (1.4) daje $\alpha(x) = \sup\big\{|\lambda| \,\big|\, \lambda \in \sigma(x)\big\}$. □

[4] Jeśli $|\mu| > 1$, to

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\mu)^{-n-1}\varphi(x^n)\Big| \leqslant \tfrac{\|\varphi\|}{|\mu|}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{\|x^n\|}{|\lambda|^{n+1}}|\mu|^{-n} \leqslant \tfrac{\|\varphi\|}{|\mu|}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{\|x^n\|}{|\lambda|^{n+1}} \xrightarrow[|\mu|\to\infty]{} 0.$$

Szereg jest zbieżny, gdyż $|\lambda| > \lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, czyli $|\lambda|^{-1} < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}}$.

Dla $x \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ wielkość

$$\sup\bigl\{|\lambda| \bigm| \lambda \in \sigma(x)\bigr\}$$

nazywamy *promieniem spektralnym* x i oznaczamy symbolem $|\sigma(x)|$. Oto kilka własności promienia spektralnego:

- dla każdego x mamy $|\sigma(x)| \leqslant \|x\|$,
- jeśli $x, y \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ są przemienne, to $|\sigma(xy)| \leqslant |\sigma(x)||\sigma(y)|$,
- $|\sigma(x^*)| = |\sigma(x)|$.

Ostatnia własność wynika natychmiast z faktu, że

$$\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)} = \bigl\{\overline{\lambda} \bigm| \lambda \in \sigma(x)\bigr\}.$$

Stwierdzenie 1.8. *Niech $x \in \mathsf{B}(\mathcal{H})$ i niech $p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_n\lambda^n$ będzie wielomianem. Niech*

$$p(x) = \alpha_0\mathbb{1} + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n.$$

Wtedy

$$\sigma\bigl(p(x)\bigr) = p\bigl(\sigma(x)\bigr) = \bigl\{p(\lambda) \bigm| \lambda \in \sigma(x)\bigr\}.$$

Dowód. Jeśli $n = 0$ (p jest stały), to teza stwierdzenia jest oczywista. Załóżmy więc, że $n \geqslant 1$. Niech $\lambda_0 \in \sigma(x)$, czyli $\lambda_0\mathbb{1} - x$ nie jest odwracalny. Wtedy operator $p(\lambda_0)\mathbb{1} - p(x)$ nie może być odwracalny, gdyż

$$\begin{aligned} p(\lambda_0)\mathbb{1} - p(x) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(\lambda_0^k\mathbb{1} - x^k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\lambda_0^k\mathbb{1} - x^k) = (\lambda_0\mathbb{1} - x)\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_0^{k-j} x^{j-1}. \end{aligned}$$

Fakt ten pokazuje, że

$$p\bigl(\sigma(x)\bigr) \subset \sigma\bigl(p(x)\bigr).$$

Z drugiej strony, jeśli $\mu \notin \bigl\{p(\lambda) \bigm| \lambda \in \sigma(x)\bigr\}$, a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są pierwiastkami wielomianu $\mu - p(\lambda)$, to oczywiście $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \notin \sigma(x)$. Mamy

$$\mu - p(\lambda) = \gamma(\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

dla pewnego $\gamma \neq 0$, więc

$$\mu\mathbb{1} - p(x) = \gamma(\lambda_1\mathbb{1} - x) \cdots (\lambda_n\mathbb{1} - x).$$

Stąd $\mu\mathbb{1} - p(x)$ jest odwracalny, co oznacza, że $\mu \notin \sigma\bigl(p(x)\bigr)$. Tym samym wykazaliśmy, że

$$p\bigl(\sigma(x)\bigr) \supset \sigma\bigl(p(x)\bigr).$$

□

1.3. Widmo w C*-algebrach

Niech A będzie C*-algebrą z jedynką (przykładem może być $\mathsf{B}(\mathcal{H})$ dla pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ lub $\mathrm{C}(X)$ dla zwartej przestrzeni X, ale nie tylko) i niech $a \in \mathsf{A}$. Podobnie jak w przypadku $\mathsf{B}(\mathcal{H})$ mówimy, że element $a \in \mathsf{A}$ jest *odwracalny*, jeśli istnieje $b \in \mathsf{A}$ taki że $ab = ba = \mathbb{1}$. Dalej definiujemy *widmo* elementu a:

$$\sigma(a) = \big\{\lambda \in \mathbb{C}\,\big|\,\text{element } \lambda\mathbb{1} - a \text{ nie jest odwracalny}\big\}.$$

Dla przykładu rozważmy C*-algebrę $\mathsf{A} = \mathrm{C}(X)$, gdzie X jest przestrzenią zwartą. Wówczas nietrudno sprawdzić, że widmem elementu $f \in \mathsf{A}$ jest obraz funkcji f.

Twierdzenie 1.9. *Niech a będzie elementem* C*-*algebry z jedynką. Wówczas:*

(1) *$\sigma(a)$ jest niepustym zwartym podzbiorem $\mathbb{C}$ zawartym w domkniętym dysku o środku w 0 i promieniu $\|a\|$,*

(2) *ciąg $\big(\|a^n\|^{\frac{1}{n}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny i*
$$\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \sup\big\{|\lambda|\,\big|\,\lambda \in \sigma(a)\big\},$$

(3) *dla dowolnego $b \in \mathsf{A}$ mamy $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$,*

(4) *dla dowolnego wielomianu $p \in \mathbb{C}[\,\cdot\,]$ mamy $\sigma\big(p(a)\big) = p\big(\sigma(a)\big)$.*

Dowody wszystkich punktów powyższego twierdzenia można przeprowadzić zamieniając $\mathsf{B}(\mathcal{H})$ na A w dowodach twierdzenia 1.7 i stwierdzeń 1.4 oraz 1.8.

Notatki

Przytoczone w niniejszym rozdziale podstawy teorii operatorów na przestrzeniach Hilberta omówione są praktycznie w każdej pozycji literatury z listy na końcu książki. Więcej informacji na temat widm operatorów i elementów C*-algebr znajdzie czytelnik w takich książkach jak np. [Arv$_2$, Ped, Mau], jak i w wielu innych. Naturalnym uogólnieniem teorii operatorów jest teoria algebr Banacha, a w szczególności teoria C*-algebr ([Arv$_1$, Zel]). Za cenę nieco bardziej abstrakcyjnych rozumowań pozwala ona łatwo uzyskać pewne wyniki teorii operatorów. Mimo to w niniejszej książce postaramy się zminimalizować korzystanie z tej teorii, pozostawiając czytelnikowi pole do samodzielnych poszukiwań.

Wspaniałym źródłem ćwiczeń i przykładów związanych z pojęciem widma jest zbiór zadań [Hal] oraz ćwiczenia, notatki i uzupełnienia z takich podręczników jak [Arv$_1$, Arv$_2$, ReSi$_1$, Rud$_2$].